中間 2

2018 年度　数学入門　第 2 回中間テスト

2018 年 11 月 27 日　小山直樹・市野泰和

すべての問いに答えてください.

問 1　（各 1 点）次の関数の導関数を求めてください.

(a)　$f(x) = x^2 - 6x + 1$
(b)　$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
(c)　$f(x) = x \log x$
(d)　$f(x) = 2\sqrt{x}$
(e)　$f(x) = e^{3x^2}$
(f)　$f(x) = \frac{x}{x+1}$

問 2　（各 2 点）問 1 の(a) (b)の関数それぞれについて，増減を調べ，極値を求めてください.

問 3　（3 点）微分をすることで変化の方向と大きさがわかる，とはどういうことなのでしょうか.「導関数」「微分係数」「接線の傾き」という 3 つの言葉をすべて使って説明してください.

問 4　（各 2 点）利子率 5%の複利計算の口座に，毎年，1 年に一度，お金を預け入れることを考えます. t年目に預け入れをした直後の時点での口座残高をS_tと表しましょう．以下の問いに答えてください.

(a) 預け入れるお金が毎年 100 万円で一定とします．等比数列の和の公式を使って，S_6を求めてください（必ず，途中式も書くこと）．計算には，$(1.05)^6 = 1.34$，$\frac{0.34}{0.05} = 6.8$を使ってください.
(b) 預け入れるお金が，1 年目から 6 年目は毎年 100 万円，7 年目から 12 年目は毎年 166 万円とします. 等比数列の和の公式を使って，S_{12}を求めてください（必ず，途中式も書くこと）．計算には，$(1.05)^6 = 1.34$，$\frac{0.34}{0.05} = 6.8$を使ってください.

問 5　（各 1 点）浜本乾物店は，代々，乾物屋さんで，毎年，年末になると，お正月料理用の昆布を買いに来る徳川家の人たちに高級昆布を売ってきました．割引因子をδで表し，以下の問いに答えてください.
(a)　毎年の年末に徳川家に高級昆布を売ることで，浜本乾物店は，1 年に一度，80 万円の利益を得ます. 現在（1 年目の年末）から，毎年，1 年に一度，永久に，徳川家に高級昆布を売ることから浜本乾物店が得る利益の割引現在価値の無限和を求めてください.
(b)　現在（1 年目の年末）に，安物の昆布を高級昆布だと偽って徳川家に売ると，浜本乾物店は現在において 400 万円の利益を得ますが，2 年目以降は，偽りがばれて，徳川家はもう浜本乾物店から昆布を買ってくれなくなり，徳川家との取引から得られる利益はゼロになります．浜本乾物店が，安物の昆布を高級昆布と偽って徳川家に売るようなことをしないためには, 割引因子δはどれくらい大きくないといけないでしょうか.

問 6　（1 点）1 年ごとに 50 円の配当金が支払われる株があるとします．つまり，この株の保有者には，1 年後に 50 円の配当金，2 年後に 50 円の配当金，3 年後に 50 円の配当金，・・・と，永久に，1 年ごとに 50 円の配当金が支払われます．利子率を 2%（$r = 0.02$）として，この株の価格を求めてください.

以上

微分の公式

(1) 実数乗の微分：どんな実数aについても，$y = x^a$ならば，$y' = ax^{a-1}$である．

(2) 関数の和の微分：$y = f(x) + g(x)$ ならば， $y' = f'(x) + g'(x)$である．

(3) 合成関数の微分：関数$y = f(z)$と$z = g(x)$の合成関数$y = f\big(g(x)\big)$の導関数は，
$y' = f'(z)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$である．

(4) 関数の積の微分： $y = f(x)g(x)$ならば，$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$である．

(5) 関数の商の微分：$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ならば $y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$である．

(6) 指数関数の微分：$y = e^x$ならば，$y' = e^x$である．

(7) 対数関数の微分：$y = \log x$ならば，$y' = \frac{1}{x}$である．

等比数列の和の公式

(1) 有限和：$\delta \neq 1$のとき，第 1 項c，公比δの等比数列の第 1 項から第 t 項までの和は，

$$\sum_{k=1}^{t} c\delta^{k-1} = c\frac{1-\delta^t}{1-\delta}$$

である．

(2) 無限和：$0 \leq \delta < 1$のとき，第 1 項c，公比δの等比数列の第 1 項からの無限和は，

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{t} c\delta^{k-1} = \lim_{t\to\infty} c\frac{1-\delta^t}{1-\delta} = \frac{c}{1-\delta}$$

である．